UOC
www.uoc.edu

#Artnodes

Julio de 2005 ISSN: 1695-5951
www.uoc.edu/artnodes

Artículo

La perfección visible: matemática y arte

http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/emmer0505.pdf

Michele Emmer

Artnodes
Julio de 2005 ISSN: 1695-5951

Artículo

La perfección visible: matemática y arte*

http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/emmer0505.pdf

Michele Emmer

Resumen
El presente artículo trata sobre las relaciones entre los matemáticos y el arte, entre la matemática y el arte, teniendo en cuenta también el uso de las tecnologías informáticas tanto en el arte como en la ciencia. A lo largo del texto se dibuja el punto de vista de los matemáticos sobre la creatividad, sobre la matemática como actividad creativa y su relación con el arte. Posteriormente se despliega el punto de vista de algunos artistas e historiadores sobre la relación entre la matemática y el arte. En especial, se consideran algunos ejemplos, como el del grabador holandés M. C. Escher y el del artista suizo Max Bill. A continuación se estudia el fenómeno nuevo de la creación por parte de los matemáticos de nuevas formas «visuales» utilizando el grafismo electrónico y cómo estas formas, a su vez, han influido en los artistas. Finalmente se traza una breve conclusión en la que se reflexiona sobre las nuevas imágenes matemáticas y artísticas.

Palabras clave
matemática, arte, *computer graphics*, creatividad, visual

Introducción

Del 20 de enero al 17 de febrero de 1963 se llevó a cabo en París una muestra de arte insólita. Insólita ante todo por el lugar en que se llevó a cabo: el Palais de la Découverte, el templo de la divulgación de la ciencia en Francia hasta que a principios de los años ochenta se inauguró La Cité des Sciences du Parc de la Villette. El propio título de esta muestra, *Formes: mathématiques, peintres sculpteurs contemporains*, ya situaba en el mismo plano la pintura y escultura contemporáneas y la matemática. En ella se expusieron obras de artistas de gran relevancia: entre los pintores se encontraban Max Bill, Paul Cézanne, Robert y Sonya Delaunay, Albert Gleizes, Juan Gris, Le Corbusier, Jean Metzinger, Peter Mondrian, Ladislas Moholy-Nagy, Georges Seurat, Gino Severini, Sophie Taeuber-Arp y Victor Vasarely; entre los escultores figuraban Max Bill, Raymond Duchamp-Villon y Georges Vantergerloo.

La muestra estaba organizada en tres secciones:

- Matemáticas
- Pintores
- Escultores

En la primera sección se exponían numerosas superficies matemáticas realizadas en metal o en yeso. En las páginas centrales del pequeño catálogo,[1] cuatro ilustraciones: dos superficies geométricas y obras de Robert Delaunay, Barbara Hepworth y Gino Severini. Como se puede ver en cada una de ellas, los responsables pusieron especial atención en asignar la misma importancia y el mismo espacio a la matemática que a las obras de pintores y escultores.

Introducción a la muestra de Paul Montel, matemático, en aquella época responsable de la sección de matemática del Palais (que se encuentra al lado del Grand Palais, uno de los templos de las exposiciones de arte parisinas; un hecho muy significativo). El texto introductorio se titula «El arte y las matemáticas». «Il peut paraître surprenant que des rapports existent entre l'Art et les

*Este artículo es una versión reducida del artículo que aparecerá a lo largo de 2005 en el libro M. Emmer, *The Visual Mind 2*, ed. MIT Press.
1. Cassou, J.; Montel, P. (1963). *Formes: mathématiques peintres sculpteurs contemporains*. Palais de la Découverte, Paris.

Título original: *La perfezione visibile: matematica ed arte*

Mathématiques, entre le monde des qualités et le monde des quantités. Pourtant, des liens étroits unissent ces deux modes de représentation… En fait, chacune des deux activités, recherche mathématiques et création artistique, est tributaire de l'autre.»

¿Cuál es el motivo de esta interdependencia? «Un résultat important obtenu en mathématique offre à son auteur une joie esthétique pareille à celle que peut donner l'harmonie architecturale ou des accords musicaux. On parle souvent de beau théorème, de démonstration élégante. Inversement, la mathématique intervient dans la conception et dans la réalisation de l'oeuvre d'art.»

Montel también facilita en el breve espacio de introducción algunos elementos en los que fundamenta sus afirmaciones: «La beauté architecturale en particulier dépend de la simplicité de ces rapports. Nos yeux d'occidentaux, par exemple, sont séduits depuis des siècles par un rapport, le nombre d'or, issu de l'Ecole de Pythagore et transmis par les corporations d'architectes et des maçons. […]

Puisque la joie esthétique est associée à la valeur de certains nombres, il a paru naturel d'essayer de représenter par une formule algébrique la beauté d'une oeuvre d'art. Félix Klein a essayé sans succés de l'obtenir pour le corps humain, G.D. Birkhoff a été plus heureux en se bornant aux formes simples des polygones, des réseaux, des vases. […]

L'Exposition actuelle nous donne l'occasion d'examiner avec soin le cas particulier de la peinture confrontée aux êtres mathématiques représentés auprès d'elle.»

Así termina el prefacio: «C'est en tenant compte de ces observations qu'il convient de mettre en lumière la part des mathématiques dans un tel accomplissement et de distinguer, reconnaître et, sur le ton du cantique, célébrer, dans la vivant chair des plus accomplies colonnes, […] *ces finesses qui naissent par les nombres*.»

La relación entre la matemática y el arte, entre matemática y estética, tiene una larga e interesante historia. Ha habido momentos en que esta relación ha sido más evidente y explícita (el Renacimiento, los primeros años del Novecento, el grafismo electrónico), otros en que los lazos entre ambas parecen debilitarse y desaparecer. A menudo estos lazos se olvidan, se alejan; una de las razones de que esto suceda se encuentra en el hecho de que quienes se dedican al arte, a la estética, a las disciplinas humanísticas, no conocen en absoluto la matemática de los últimos siglos. Tienen tan sólo una idea de la matemática griega y renacentista. Un ejemplo de ello es el caso del grabador holandés M. C. Escher, del que parece que sólo interesa determinar si fue o no un gran artista, cuando, a mi entender, es mucho más interesante estudiar su influencia en la cultura del Novecento. No es casual que, con pocas excepciones (E. Gombrich), los ensayos sobre Escher hayan sido escritos por científicos.[2] «Como en las artes, cada detalle de la obra final no se descubre sino que se compone. El proceso creativo debe, obviamente, producir una obra que posea diseño, armonía y belleza. Estas cualidades también están presentes en la creación matemática.»[3]

Comentando estas palabras de Kline, destaqué en un ensayo dedicado al tema «Matemática y arte» que[4] «aunque no sea interesante discutir las ideas sobre el arte de los matemáticos, en cambio sí vale la pena recalcar que esta aspiración artística está difundida en la comunidad matemática. Y junto a esta exigencia se encuentra la necesidad de reconocer la creatividad artística del matemático por parte de los no especialistas en el tema; reconocimiento que generalmente no se les concede, en especial por parte de los que se dedican al arte, en cierto modo porque ello comportaría tener que entender algo de matemática contemporánea. Todo el mundo puede mirar una obra de arte o escuchar una sinfonía, mientras que no se puede mirar o escuchar la matemática. Kline se da plena cuenta de que ése es el problema cuando afirma que «la comprobación definitiva de una obra de arte es su contribución al placer estético o a la belleza. Afortunadamente, o desgraciadamente, se trata de una comprobación subjetiva, que depende del grado de cultura en un sector específico. A la pregunta de si la matemática posee o no una belleza propia, por tanto, sólo se le puede dar una respuesta por parte de los que tienen cierta cultura en esta disciplina... Por desgracia, para dominar las ideas matemáticas se necesitan años de estudio y no existe ningún atajo que abrevie materialmente este proceso».

Al querer examinar el trabajo intelectual surgen dificultades, que son aún mayores cuando se habla de matemática, por la dificultad objetiva de que se tiene que hablar de matemática a quien no tiene las experiencias matemáticas adecuadas. Pero el mismo discurso se puede aplicar a cualquier disciplina del saber humano. Cuando las respuestas son difíciles, o mejor, cuando son difíciles las preguntas, los matemáticos habitualmente empiezan a aportar ejemplos, intentan modificar las preguntas, para tratar de simplificar las respuestas. Y es justo lo que se puede intentar hacer.

Matemática y arte: los matemáticos

«Creo que en el origen de la creatividad en todos los campos existe lo que yo llamo la capacidad o la disponibilidad para soñar; para imaginar mundos diferentes, cosas diferentes, intentando combinarlos en la propia imaginación de otro modo. A esta capacidad, tal vez muy semejante en todas las disciplinas, de la matemática a la filosofía, de la teología al arte, de la pintura a la escultura, a la física, a la biología, se le une la capacidad de comunicar los propios sueños; una comunicación no ambigua requiere el conocimiento del lenguaje, de las reglas internas propias de las diversas disciplinas. Creo que existe una capacidad para soñar generalmente

2. Coxeter, H.S.M.; Emmer, M.; Penrose, R.; Teuber, M. (eds.) (1986). *M.C. Escher: Art and Science*. Ámsterdam: North-Holland, Elsevier. Emmer, M. (2001). *The fantastic World of M.C. Escher* [grabación de vídeo]. Berlín: Springer Math Video Series (50 min). Emmer, M.; Schattschneider, D. (eds.) (2003). *M.C. Escher's Legacy* [contiene CD-ROM]. Berlín: Springer-verlag.
3. Kline, M. (1953). *Mathematics in Western Cultura*. Oxford: Oxford University Press. Nueva York: reimpresión Penguin Books, 1977, pág. 523-525.
4. Emmer, M. (1991). *La perfezione visibile*. Roma: Theoria ed.

Título original: *La perfezione visibile: matematica ed arte*

indistinta, como era generalmente indistinto el sentimiento que los antiguos llamaban filosofía, amor por la sabiduría, y los diversos modos de comunicar de forma no ambigua esos sueños, ese amor por la sabiduría, utilizando lenguajes diferentes, esquemas diferentes que son propios de las diversas disciplinas, y de las diversas artes, de las diversas formas del saber humano.

Lo que quisiera dejar claro es una idea que he madurado con el paso de los años, la idea de un origen común de todas las ciencias y las artes que reside en el amor por la sabiduría, por la sabiduría como base común de la cual las diferentes disciplinas no son más que las diferentes facetas. Facetas que debemos distinguir porque la naturaleza humana, el lenguaje humano necesita, para ser claro y no ambiguo, fijar cada vez ciertas referencias locales y especializadas. Pero, al mismo tiempo, no debemos encerrarnos en la especialización, encerrarnos en la matemática, encerrarnos incluso en una rama de la matemática si no queremos esterilizar nuestra creatividad.»

Imaginación, sueño, filosofía, matemática, artes, creatividad. Palabras de Ennio De Giorgi,[5] famoso matemático italiano fallecido en 1996. Un acercamiento entre creatividad, sueño y matemática. De Giorgi no pronunció explícitamente otras dos palabras en las que tanto creyó como matemático: belleza y estética. Matemática, creatividad, imaginación, belleza, estética. La matemática, los matemáticos, tienen que ver con la belleza, con la estética.

En las actas del congreso *Matemáticas y arte*[6] celebrado en 1991 en el Centre Culturel Cerisy La Salle, el matemático Jacques Mandelbrojt habla de la espontaneidad matemática. «La intuición inicial del matemático o del artista es libre, libre de la presión de lo real que pesa sobre las ciencias experimentales. La matemática, aparte de la evolución relacionada con la física, se desarrolla siguiendo una lógica propia, y, de hecho, no está ligada a la realidad. El matemático practica la matemática por introspección, como haría un artista.»

Mandelbrojt recuerda que la belleza es un criterio importante. Recuerda lo que escribía su padre, matemático, cuando explicaba por qué se dedicaba a este trabajo. El padre hablaba de esa «belleza inmaterial»: «Para ser interesante, un hecho matemático debe ser, ante todo, bello. Un teorema puede y debe ser bello, como lo es, por ejemplo, una poesía… El hecho matemático interesante crea un estado de espíritu.»

En matemática existe el afán del descubrimiento, la desilusión de la derrota, la felicidad del éxito. Todo ello obtenido tan sólo enfrentándose a uno mismo o a algún otro matemático, utilizando técnicas precisas, que a su vez también son objeto de indagación e investigación.

Siendo, pues, que se deja un gran espacio a la intuición, a la fantasía y a la emoción, se plantea la cuestión fundamental de por qué muchas personas consideran que la inclusión de la matemática entre las artes es injustificada. Una de las objeciones más recurrentes es que la matemática no provoca emoción alguna. Morris Kline apunta que la matemática provoca indudables sentimientos de aversión y de reacción y por otra parte genera gran felicidad en los investigadores cuando consiguen dar una formulación precisa a sus ideas y obtener demostraciones hábiles y geniales. El problema consiste en el hecho de que son sólo los investigadores los que pueden sentir estas emociones y nadie más.

Kline añade que el arte moderno pone más el acento en el aspecto teórico y formal de la pintura; obras como las de Picasso se dirigen más al intelecto que a la esfera emotiva. Aunque estas aserciones parecen poco convincentes, el afán por afirmar la plena validez de la actividad creadora del matemático se trasluce cuando éste observa que «un arte debe proporcionar un desahogo al instinto creativo del hombre. Una mirada atrás hacia el desarrollo de nuestro sistema numérico, los perfeccionamientos de los métodos de cálculo, el origen y la expansión de nuevos sectores inspirados en los problemas del arte, las ciencias y la filosofía y los perfeccionamientos del razonamiento riguroso demuestran que los matemáticos crean. Como en las artes, cada detalle de la obra final no se descubre, sino que se compone.»

Robert Musil escribió que la matemática «es la destilación más pura que el pensamiento exacto ha extraído de los esfuerzos del hombre por comprender la naturaleza, por impartir orden a la confusión de los acontecimientos que se producen en el mundo físico, por crear belleza y satisfacer la inclinación natural del cerebro sano a ejercitarse.»

Si alguien ha percibido cierto sentimiento de superioridad en estas palabras, ha acertado. Por tanto, no debe sorprender que, si la matemática es creadora de belleza y es la destilación más pura del pensamiento exacto, pretenda aportar los instrumentos, además de a las demás disciplinas científicas, también a las artes; y que, en consecuencia, sea posible mediante la matemática elaborar una teoría científica de las artes que tenga sus mismas características de exactitud y universalidad. Ambición nada pequeña, desde luego. Si se acepta que la matemática es una parte relevante de nuestra cultura, también se debe tener presente el punto de vista del matemático en ésta como en muchas otras cuestiones.

«Aunque existan aún pseudohumanistas para quienes la no comprensión de la matemática (no comprensión que les une a todo lo que no es humano) constituye algo de lo que sentirse orgulloso, el número creciente de profanos que se lamenta de no poder participar plenamente en este banquete de los dioses… es más bien tranquilizador.» Así comienza el prefacio a la segunda edición del libro *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, escrito por el matemático François Le Lionnais.[7] La idea le vino mientras se encontraba en Marsella en 1942, durante la ocupación nazi de Francia. Partisano, fue arrestado en abril de 1944 e internado en el campo de concentración de Dora. Volvería en mayo de 1945. Durante su estancia en él era tan fuerte su interés por

5. Emmer, M.; De Giorgi, Ennio (julio 1996). *Scuola Normale Superiore* [entrevista]. *Unione Mathematica Italiana*, Bolonia, 1997. Reimpresión del texto en: Emmer, M.; Manaresi, M. (eds.) (2002). *Matematica, arte, tecnologia, cinema*. Milán: Springer Italia (edición en inglés, 2003), pág. 270-281.
6. Mandelbrojt, J. (1995). «Spontanément mathématique». En: Loi, M. (ed.). *Mathématiques et Art*. París: Herman editeurs, pág. 29-38.
7. Le Lionnais, F. (ed.) (1962). *Les grands courants de la pensée mathématique*. París: Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard.

el proyecto del libro que arriesgó su vida: un día los guardias le confiscaron una lista de nombres, escritos en un trozo de papel de embalar; pensaron en compañeros de lucha, pero sin embargo eran los nombres de aquellos a quienes Le Lionnais quería pedir colaboración para el proyecto. Con el libro quería intentar «mostrar, no el inmóvil panorama de los sectores pertenecientes a la matemática, sino sobre todo las direcciones hacia las que se estaban moviendo las diversas disciplinas matemáticas.»

En el capítulo «Arts et esthétique: Les mathématiques et la beauté», Le Lionnais responde a quien quiere reducir la relación entre matemática y arte a las proporciones, a los números: «En matemática existe una belleza que no se debe confundir con el posible aporte de la matemática a la belleza de las obras de arte. La estética de la matemática debe distinguirse de las aplicaciones de la matemática a la estética.» Continuando con la belleza de la matemática, Le Lionnais precisa que pretender reducirlo todo sólo a la matemática significa reducir al exceso la naturaleza del arte. Lo cual no impide, no obstante, que haya una reacción positiva contra los lugares comunes que oponen el arte a la matemática como el *esprit de finesse* al *esprit de géométrie*. Las palabras que Le Lionnais también utiliza para describir la belleza de la matemática no son distintas de las de tantos otros matemáticos:[8] «Es así como la belleza da prueba de sí en matemática como en las otras ciencias, las artes, la vida y la naturaleza. A veces comparables a las de la música pura, la gran pintura o la poesía, las emociones que la matemática suscita son la mayoría de las veces de una naturaleza distinta que no se puede entender si no se ha tenido personalmente esta iluminación. La belleza de la matemática, es cierto, no garantiza ni su verdad ni su utilidad. Pero a algunos les da la posibilidad de vivir horas incomparables, a otros la certeza de que la matemática continuará siendo practicada en beneficio de todos y para la gloria de la aventura humana.»

Theodor Lipps consideraba que una determinación numérica de la percepción espacial estética sería un gran beneficio desde el momento en que, si la mecánica estética estuviese subordinada a una ley matemática, sería posible, al menos en teoría, expresar las leyes operantes en las formas con la ayuda de una fórmula matemática.

Fue el matemático George David Birkhoff (1884-1944) quien intentó esta vía, llegando a dar una fórmula explícita de la sensación del placer estético en su largo ensayo *A Mathematical Approach to Aesthetics.*[9] La legitimidad de una estética matemática se basa en el hecho de que todos los fenómenos psicológicos y sociales parecen revelar al *Homo mathematicus* estructuras lógicas, y éste –observa Birkhoff–[10] «llega a creer que un progreso posterior en estas difíciles direcciones sólo se podrá llevar a cabo cuando se hayan desarrollado conceptos y métodos matemáticos más adecuados. Es más, el vasto dominio del pensamiento matemático puro da testimonio de manera irrefutable de que tanto el mundo objetivo como el subjetivo son de naturaleza matemática.» De ahí que en el ámbito de la estética se pueda reconocer y cuantificar un orden de tipo matemático determinado por factores de orden como la simetría, la rotación, el equilibrio, la simplicidad. Para expresar la medida estética de un objeto, simplificando al máximo, hay que determinar la función (estética) M que mide la sensación del placer estético como relación entre el orden O del objeto y su complejidad C:

$$M = O/C$$

La teoría de Birkhoff deja abierta la cuestión central: «¿Qué vemos y sentimos nosotros frente a una configuración visual, un fragmento musical, si a este ver y sentir se le aplica un método matemático de medida?» Se entiende bien la dificultad de dar una respuesta; queda el hecho de que, fascinados por la belleza de su disciplina, algunos matemáticos han intentado e intentan abrir la puerta de la verdad matemática incluso a disciplinas que sólo se pueden afrontar de este modo marginalmente.

Matemática y arte: los artistas

Ha llegado el momento de ver cuál es el punto de vista de dos historiadores del arte como Lucy Adelman y Michael Compton. Su tono es más comedido; evidentemente, no se puede esperar el mismo entusiasmo de quien no ha tenido la suerte de participar en este banquete de los dioses. «Aunque la pintura y la matemática sean dos disciplinas muy diferentes, que a menudo se han considerado totalmente contrapuestas, entre ellas ha habido muchos puntos en común», escriben en su ensayo *Mathematics in Early Abstract Art.*[11]

Aunque el primer ejemplo recordado es el de la perspectiva, los autores observan que es a principios de este siglo cuando se produce un acercamiento entre arte y matemática, que se demostró provechoso para el primero. Se pueden distinguir diferentes niveles de relación entre matemática y arte, niveles que los dos autores separan por comodidad, dado que a menudo hay diversos niveles en una sola obra. Se está hablando de los inicios del arte abstracto.

«Ante todo había un interés generalizado por las geometrías no euclidianas y/o no dimensionales… En segundo lugar, el período señaló la derrota de la perspectiva y su sustitución con cánones diversos menos sistemáticos. En tercer lugar, los artistas hacían uso de proporciones numéricas y de parrillas que, como las figuras geométricas, se asociaban a la idea de reducir el arte a sus elementos específicos. En cuarto lugar, aparecieron en pintura elementos que se extraían de textos de matemática… Por último, simples figuras geométricas se asociaron a las máquinas y a sus productos y de esta manera al "progreso" o a la "modernidad".»

8. Le Lionnais, F. «*La beauté en mathématiques*». En: Le Lionnais, F. (*op. cit.*), pág. 457-458.
9. Birkhoff, G.D. (1931). *A Mathematical Approach to Aesthetics*. Scientia.
10. Birkhoff, G.D. (1934). *Mathematics: Quantity and Order*. Science Today.
11. Adelmand, L.; Compton, M. (1980). «Mathematics in Early Abstract Art». En: Compton, M. (ed.). *Towards a New Art*. Londres: The Tate Gallery, pág. 64-89.

Realmente no es casual que la más lúcida exposición de la posibilidad de un enfoque matemático a las artes haya sido formulada por un artista como Max Bill. En 1949 el artista suizo escribía que[12] «por enfoque matemático no se debe entender lo que generalmente se llama arte calculado. Hasta ahora todas las manifestaciones artísticas se han basado, en mayor o menor medida, en divisiones y estructuras geométricas.» En el arte moderno los artistas también han utilizado métodos reguladores basados en el cálculo, dado que estos elementos, junto a los de carácter más personal y emocional, han aportado equilibrio y armonía a la obra plástica. Pero dichos métodos se convirtieron cada vez en más superficiales, según Bill, ya que, aparte de la excepción de la teoría de la perspectiva, el repertorio de métodos utilizados por los artistas se detenía en la época del Antiguo Egipto. El hecho nuevo se produce a inicios del siglo XX: «El punto de partida de una nueva concepción se debe probablemente a Kandinsky, que en su libro *Ueber das Geistige in der Kunst*[13] puso en 1912 las premisas de un arte en el que la imaginación del artista se sustituiría por la concepción matemática.» Fue Mondrian el que se alejó más que cualquier otro de la concepción tradicional del arte. Mondrian escribía: «El neoplasticismo tiene sus raíces en el cubismo. También se le puede llamar pintura abstracto-real, porque lo abstracto (como las ciencias matemáticas pero sin alcanzar como ellas lo absoluto) puede ser expresado por una realidad plástica en la pintura. Ésta es una composición de planos rectangulares coloreados que expresa la realidad más profunda, que llega a través de la expresión plástica de las relaciones y no a través de la apariencia natural… La nueva plástica plantea sus problemas en equilibrio estético y expresa de ese modo la nueva armonía.»

Bill opina que Mondrian agotó las últimas posibilidades que le quedaban a la pintura. ¿Qué caminos se debían recorrer para hacer posible una evolución futura del arte? El retorno a lo antiguo y a lo conocido, o el acercamiento a una temática nueva. ¿Y cuál podía ser esta nueva temática? «Yo creo que se puede desarrollar ampliamente un arte basado en una concepción matemática.» Poco después se preocupa de responder a las posibles objeciones sobre el carácter no artístico de la matemática; sus argumentos son muy parecidos a los del matemático Kline: «Se sostiene que el arte no tiene nada que ver con la matemática, que esta última constituye una materia árida, no artística, un campo puramente intelectual y en consecuencia extraño al arte. Ninguno de estos dos argumentos es aceptable, porque el arte necesita del sentimiento y del pensamiento... El pensamiento permite ordenar los valores emocionales para que de ellos pueda salir la obra de arte.» Tampoco hay que olvidar que Max Bill es, sobre todo, un escultor que tiene en cuenta la geometría, que expresa la relación entre las posiciones en el plano y en el espacio, el primer elemento de cualquier obra plástica. Ya he destacado que sólo una pequeña parte de la matemática se puede visualizar, representar. Entonces, ¿cómo puede la matemática ser útil a un artista? Bill responde que «la matemática no es sólo uno de los medios esenciales del pensamiento primario y, por tanto, uno de los recursos necesarios para el conocimiento de la realidad circundante, sino también, en sus elementos fundamentales, una ciencia de las proporciones, del comportamiento de objeto a objeto, de grupo a grupo, de movimiento a movimiento. Y ya que esta ciencia tiene en sí elementos fundamentales y los pone en relación significativa, es normal que estos hechos puedan ser representados, *transformados* en imágenes.» Además de estas representaciones matemáticas, estos casos límite en que la matemática se manifiesta plásticamente tienen indiscutiblemente un efecto estético, añade Bill, y han tenido «casi tanta importancia en la búsqueda de nuevas posibilidades de expresión artística como el redescubrimiento de las esculturas negras por parte de los cubistas.» Y he aquí la definición de lo que debe ser una concepción matemática del arte: «La concepción matemática del arte no es la matemática en el sentido estricto del término, incluso se podría decir que sería difícil para este método utilizar lo que se entiende por matemática exacta. Es más bien una configuración de ritmos y relaciones, de leyes que tienen un origen individual, del mismo modo que la matemática tiene sus elementos innovadores originarios en el pensamiento de sus innovadores».

Figura 1. Max Bill, *Cinta de Moebius*

Como se ha visto, la presencia de posibles correlaciones entre matemática y arte no es un fenómeno limitado sólo al Renacimiento. En estos últimos años ha aparecido un fenómeno nuevo que está modificando el tipo de la relación entre los matemáticos y el arte. Aun admitiendo que la matemática sea un arte, que sea posible aplicar criterios matemáticos al arte y, en consecuencia, construir un enfoque matemático del arte, aun así, el arte sigue siendo algo distinto a la matemática; ningún matemático pretende ser recordado como un gran artista. En los últimos años, gracias a la explo-

12. Bill, M. (1949). *Die mathematische Denkweise in der Kunst unserer Zeit*. A: *Werk*, nº. 3. Reimpresión en inglés que incluye correcciones del autor en: Emmer, M. (ed.) (1993). *The Visual Mind*. Boston: MIT Press.
13. Kandinsky, W. (1912). *Ueber das Geistige in der Kunst*. Mónaco: R. Piper & Co.

sión de la revolución informática, a las cada vez más sofisticadas técnicas de *computer graphics* o grafismo electrónico, se han podido visualizar fenómenos matemáticos cuya existencia hubiera sido difícil suponer. «Ya que esta ciencia tiene en sí estos elementos fundamentales y los relaciona de manera significativa, es normal que dichos hechos se puedan representar, transformar en imágenes... De ellas se obtiene un efecto indiscutiblemente estético» escribía Bill en 1949. ¿Estas palabras también se pueden aplicar a las imágenes creadas por los matemáticos en los últimos años?

Dos ejemplos

En los años treinta el grabador holandés M. C. Escher, que entonces vivía en Italia, elaboró un sistema para seleccionar los grupos cristalográficos con color. Lo interesante a destacar es que Escher no utiliza el sistema que se usa en matemática y en cristalografía –es casi seguro que no conocía el sistema de clasificación *oficial*–, sino que inventa un sistema propio que utiliza como base de datos para elaborar a lo largo de los años sus mosaicos periódicos. Y no sólo eso, sino que, como destacó el geómetra H. S. M. Coxeter en un artículo publicado en *Leonardo* en 1979, Escher se había anticipado, siempre a propósito de los recubrimientos con color, a un descubrimiento de Coxeter en al menos cinco años.[14] El sistema utilizado por Escher fue analizado por primera vez por Doris Schattschneider en un artículo aparecido en las actas del congreso sobre Escher de 1985, y luego de forma completa en el libro *Vision of Symmetry*.[15] No hay duda de que el caso Escher es un ejemplo privilegiado de la relación entre arte y matemática. Es conocida la colaboración entre Escher y los matemáticos Penrose y Coxeter; gracias a las sugerencias del primero, Escher elabora algunos de sus grabados más notables: los objetos imposibles, aunque la primera construcción imposible *Belvedere* se realizó sin que Escher fuera conocedor de las investigaciones análogas de Penrose. Desgraciadamente, Escher falleció en 1972 antes de poder ser informado por Penrose de los recubrimientos no periódicos que tanta importancia han alcanzado en la teoría de los cuasi-cristales. En el caso de Escher no se está ante la obra de un artista que *ilustra* algunas ideas de la matemática, sino, más bien, que utiliza algunas ideas matemáticas para construir y elaborar su propio espacio geométrico. Ello, obviamente, no significa en absoluto que en las obras del grabador holandés sólo tenga interés el aspecto matemático. Como subrayó Escher en más de una ocasión, a cada uno, su oficio. Por tanto, no debe sorprender que las obras de Escher hayan estimulado a los matemáticos además de a los grafistas y los expertos en comunicación visual.

También en los años treinta Max Bill redescubre una superficie topológica ya conocida desde hacía cincuenta años por los matemáticos, la cinta de Moebius. Con el paso de los años, Bill realizó muchas superficies topológicas; por desgracia, nunca se llevó a cabo el proyecto para una sala del British Museum dedicada enteramente a las esculturas topológicas. Bill aportó ejemplos, interesantes desde su punto de vista de artista, de lo que llama los misterios de la problemática matemática como «lo inefable del espacio, el alejamiento o la proximidad del infinito, la sorpresa de un espacio que comienza por una parte y termina por la otra, que es contemporáneamente la misma, la delimitación sin límites exactos, las paralelas que se intersecan y la infinidad que vuelve a sí misma. No se trata de puro formalismo, como alguno piensa erróneamente, ni siquiera de formas de belleza, sino de pensamiento, idea, conocimiento, convertidos en forma; es decir, que éstas no son sustancias existentes en superficie, sino la idea primera de la estructura del mundo, de la actitud respecto a la imagen que nos podemos hacer actualmente del mundo… Cuanto más precisa es la línea de pensamiento, cuanto más homogénea es la idea fundamental, cuanto más en armonía está el pensamiento con la forma de pensar matemática y más nos acercamos a la estructura primaria, más universal se vuelve el arte. Se me objetará que eso ya no es arte… Del mismo modo se podría decir que nada más que eso es arte.»

Figura 2. M.C.Escher, *Grabado con teselaciones*

Visual Mathematics

En los últimos años se ha producido un notable incremento del uso del ordenador en matemática. Ello ha comportado no sólo el desarrollo de un sector específico de la matemática que podemos llamar *visual mathematics*, sino también un interés renovado por parte de los artistas por la matemática, las imágenes matemáticas, lo que ha suscitado también por parte de los propios matemáticos una atención renovada hacia los aspectos estéticos de algunas de las nuevas imágenes científicas realizadas. Como se ha dicho, el instrumento principal de este nuevo modo de hacer matemática, que no ha suplan-

14. Coxeter, H.S.M. (1979). *The Non-Euclidean Symmetry of Escher's Picture'Circle Limit III'*. Leonardo, vol. 12, nº.1, pág.19-25.
15. Schattschneider, D. «M.C. Escher Classification System for his Colored Periodic Drawings». En: Coxeter, H.S.M. *et al.* [2], pág. 82-96. Schattschneider, D. (1990). *Vision of Symmetry*. W.H. Freeman and Co. Nueva York.

tado en absoluto al método, llamémosle, tradicional, sino que se le está simplemente uniendo, es el *computer graphics* o grafismo electrónico. No se trata simplemente, como se podría pensar, de *hacer visibles*, visualizar fenómenos bien conocidos mediante instrumentos gráficos, sino más bien de utilizar instrumentos visuales para conseguir hacerse una idea de problemas aún abiertos, sin resolver, en la investigación matemática. El ordenador es un auténtico instrumento para *experimentar* y formular conjeturas. Lo que puede interesar a los que se dedican a la relación entre arte y ciencia es el hecho de que esta utilización gráfica por parte de los matemáticos ha desarrollado mucho su capacidad creativa en lo que se refiere a las imágenes. Ello ha llevado, por un lado, a hacer renacer de manera prepotente la ambición de los matemáticos de ser considerados como artistas a todos los efectos, y por otro lado, al redescubrimiento de la matemática por parte de los artistas. Se han creado diversos grupos *interdisciplinarios* en los que los matemáticos trabajan junto a los expertos en grafismo electrónico y los artistas. Ya se han organizado muestras y se han realizado, a partir de las imágenes obtenidas en la pantalla del ordenador, obras plásticas más *tradicionales.*

Se puede concluir que la difusión de los ordenadores con elevadas capacidades gráficas está abriendo a los matemáticos un nuevo sector de investigación que podría llevar al grafismo electrónico a convertirse, en un futuro no demasiado lejano, en un posible lenguaje unificador entre el arte y la ciencia. En nuestros días no podemos sino alegrarnos de esta nueva extendida colaboración entre matemáticos y artistas; aunque no asistamos a un nuevo *Renacimiento*, sin embargo podemos esperar resultados interesantes entre ambos sectores. Para dar una idea de la cada vez mayor importancia de este aspecto visual, basta con recordar los congresos que se han celebrado en el MSRI (Mathematical Science Research Center) de Berkeley desde 1988, el año siguiente al inicio del Geometry Supercomputer Project en la Universidad de Minnesota en Minneapolis; el segundo se realizó en octubre de 1992, durante la misma semana en que se conmemoraba el aniversario de la muerte de Piero della Francesca, nombre de gran importancia para el estudio de la relación entre matemática y arte –la muerte de Piero coincidió con el descubrimiento de América por Colón–. Y también la misma semana se publicó el número especial de *Leonardo* titulado *Visual Mathematics*[16] dedicado a Piero della Francesca. Mientras que en el congreso de 1988 los que presentaban imágenes por ordenador en lugar de las tradicionales demostraciones en la pizarra eran el 30%, en el congreso de 1992 ningún matemático presentó su comunicación sin utilizar una *work station* en tiempo real o una grabación en vídeo de experimentos efectuados anteriormente. Mientras que en el congreso de 1988 se escucharon a menudo preguntas del tipo: «¿Pero sois capaces de dar una demostración formal de lo que hacéis ver?», en el congreso de 1992 no se formuló ninguna pregunta de ese tipo. Vale la pena recordar el festival de cine matemático, que se desarrolló durante las noches del congreso; se vieron, entre otras, imágenes de superficies mínimas descubiertas hacía poco acompañadas de la música de Jim Hendrix o Miles Davis. No es necesario subrayar que las películas estaban realizadas íntegramente por los propios matemáticos. ¡Algo inimaginable algunos años antes!

Los congresos sobre matemática visual luego se trasladaron a la Universidad Técnica de Berlín. Durante el congreso mundial de matemática de Berlín de 1998 se convocó un concurso para las mejores películas y vídeos de matemática; se enviaron muchísimos, se seleccionaron veinte y con ellos se realizó un videocasete; este mismo concurso también se celebró durante el congreso europeo de Barcelona. Desde entonces Springer ha lanzado una colección de vídeo sobre matemática.[17]

Al realizar el libro *The Beauty of Fractals*,[18] Peitgen y Richter quisieron no sólo presentar una parte de la teoría matemática en la que se basan los fractales, sino que utilizaron ideas matemáticas como ilustración e incluso como pretexto de su actividad creadora, queriendo presentarse no tanto como matemáticos sino como artistas. En la introducción del libro se hace una llamada explícita a la posibilidad de una reconciliación entre el lenguaje científico y el artístico. Es el propio matemático quien se propone como artista, sin mediaciones. «Ciencia y arte: dos modos complementarios de relacionarse con la realidad natural, analítico el primero, intuitivo el segundo. Consideradas en las antípodas la una de la otra, tal vez inconciliables, están íntimamente ligadas; en su esfuerzo por resolver toda la complejidad de los fenómenos en pocas leyes fundamentales, el hombre de pensamiento es también un visionario, y no en menor grado que quien, amante de lo bello, se sumerge en la riqueza de las formas sintiéndose parte del eterno devenir.» Las imágenes realizadas para el libro luego se convirtieron en una muestra itinerante titulada *Frontiers of Chaos*, que se presenta como una exposición artística de objetos científicos o como una exposición científica de objetos artísticos. El propio Mandelbrot en varias ocasiones subrayó la importancia de los fractales en el arte:[19] «Podemos afirmar que la geometría fractal ha dado lugar a una nueva categoría de arte, próxima a la idea del arte por el arte, un arte por la ciencia (y por la matemática). El origen del arte fractal reside en reconocer que fórmulas matemáticas muy simples que parecen totalmente áridas pueden ser, en cambio, muy ricas, por así decirlo, de una enorme complejidad gráfica. El gusto del artista puede intervenir sólo en la elección de las fórmulas, en su organización y rendimiento visual. En consecuencia, el arte fractal parece no tener cabida en las habituales categorías de 'invención', 'descubrimiento' y 'creatividad'.» Y añade que «hoy podemos afirmar que, aparte de la belleza abstracta de la teoría, está también la belleza plástica de la curva, una belleza sorprendente. Por tanto, en esta matemática, que tiene cien años, muy elegante desde el punto de vista formal, muy bella para los especialistas, había también una belleza física, accesible a cualquiera... Utilizando

16. Emmer, M. (ed.) (1992). *Visual Mathematics*. Edición especial: «Leonardo». Oxford: Pergamon Press, vol. 25, nº. 3-4.
17. Hege, H.-C.; Polthier, K. (eds.) (1998). *Video Math Festival at ICM'98*. Berlín: Springer Math Video Series.
18. Peitgen, H.O.; Richter, P.H. (1986). *The Beauty of Fractals*. Berlín: Springer-Verlag.
19. Mandelbrot, B.B. (1989). *La geometria della natura: sulla teoria dei frattali*. Roma: Theoria.

el ojo y la mano, en matemática, no sólo hemos reencontrado la belleza antigua, que sigue intacta, sino que hemos descubierto una belleza nueva, oculta y extraordinaria... Quien se dedica sólo a las aplicaciones prácticas quizás puede tener tendencia a no insistir demasiado en el aspecto artístico, porque prefiere atrincherarse tras los tecnicismos propios de las aplicaciones prácticas. Pero, ¿por qué el matemático riguroso debería temer a la belleza?»

Hay que decir que las imágenes fractales han envejecido muy rápidamente. El problema de muchas de las imágenes obtenidas con los procesadores es que tienen el gran handicap, desde el punto de vista artístico, de ser superadas en muy poco tiempo, sobre todo, en mi opinión, en el caso de que los objetos generados sean el resultado de un juego combinatorio casual. Son mucho más interesantes y duraderas las imágenes vinculadas a la resolución de problemas científicos, imágenes que han contribuido a abrir nuevos campos de investigación y, por tanto, han contribuido también al nacimiento de formas nuevas que amplían el horizonte del imaginario matemático.

Uno de los aspectos más fascinantes del estudio de las superficies mínimas consiste en el hecho de que en caso de problemas ambientados en el espacio euclidiano en tres dimensiones se pueden obtener modelos de superficies mínimas utilizando el agua con jabón. Es decir, que se pueden ver las soluciones de los problemas. Se puede afirmar que las burbujas y láminas de jabón tienen una vida paralela entre arte y ciencia.[20] En el artículo que Fred Almgren escribió para *Visual Mathematics* apunta que[21] «the rapid development of computer graphics is especially exciting to mathematicians. This is an area in which artists may be able to help mathematicians... As we build new mathematics, we must develop the potential inherent in computer-generated images and must find artistic methods of expressing mathematical visions.»

Pero no todas las superficies mínimas se pueden obtener con las láminas de jabón; es esencial, para que ello sea posible, que se respeten algunas propiedades topológicas. Por ejemplo, las láminas de jabón tienden siempre a rellenar los huecos; por tanto, no se pueden obtener en general con el agua con jabón superficies mínimas con huecos. Dos matemáticos americanos, David Hoffman y William Meeks III, utilizando las ecuaciones encontradas por el matemático brasileño Costa, han conseguido demostrar la existencia de una clase de superficies mínimas de tipo topológico bastante elevado, superficies mínimas con huecos, no obtenibles por tanto con las láminas con jabón. El método usado por los dos matemáticos consistió en estudiar visualmente, en el vídeo de un procesador, las superficies construidas a partir de las ecuaciones de Costa para intentar entender cuál era su estructura; a partir del estudio de las imágenes Hoffman y Meeks han logrado captar algunas simetrías de las figuras que veían y gracias a esta observación también han podido demostrar analíticamente la existencia de las soluciones. En un trabajo reciente, los dos matemáticos americanos consideran que ahora el grafismo electrónico es el nuevo jabón a utilizar para estudiar las superficies mínimas. Y no sólo eso, sino que el uso de las imágenes en el estudio de algunos sectores de la investigación matemática continuará extendiéndose. ¿Los motivos? Según ellos son más de uno: «Las imágenes generadas por un ordenador permiten observar nuevos fenómenos matemáticos, a menudo inesperados, permitiendo por tanto experimentar; además, se pueden estudiar aspectos cada vez más complejos e interesantes de fenómenos ya conocidos, aspectos que no se podrían estudiar de otro modo. Así es que, basándose en el estudio de ejemplos y fenómenos, se pueden observar configuraciones totalmente nuevas. Finalmente, es más fácil y más fecundo establecer lazos con las otras disciplinas científicas, incluso con las artes.»

Las imágenes que se iban obteniendo (gracias a los primeros ejemplos Hoffman y Meeks lograron construir toda una nueva familia de superficies mínimas) tenían una forma que suscitaba un interés no sólo estrictamente matemático. El propio Hoffman dijo en una entrevista que «esta colaboración entre arte y ciencia ha producido algo significativo en ambos sectores.» Es interesante destacar que el título de la entrevista era «MATH-ART».

Observaciones finales

En los últimos años, gracias a la explosión de la revolución informática, las cada vez más sofisticadas técnicas de grafismo electrónico, se han podido visualizar fenómenos matemáticos que hubiera sido difícil suponer que existieran. «Dado que esta ciencia tiene en sí estos elementos fundamentales y los pone en relación significativa, es normal que tales hechos se puedan representar, transformar en imágenes... De ellas proviene un efecto indiscutiblemente estético», escribía Bill en 1949. ¿Se pueden aplicar estas palabras también a las imágenes creadas por los matemáticos en los últimos años? La novedad es que ahora los matemáticos, además de seguir pretendiendo que su disciplina es un arte, también quieren ser considerados, al menos algunos, artistas de pleno derecho. En estos años se ha asistido a una gran difusión de imágenes matemáticas, de objetos que son el resultado de las investigaciones matemáticas más diversas. Dentro de este perfil se encuentran algunos ejemplos particularmente interesantes, como los mencionados, tanto desde el punto de vista estrictamente matemático como estético, al menos a juicio de los matemáticos que los han elaborado. Sin que se quiera afirmar que, aunque se pueda hablar de progreso de los conocimientos en el ámbito matemático, ello comporte una mejora en el campo artístico, donde un discurso de ese género no tendría sentido. Es lícito esperar más novedades en la relación entre matemática y arte, en gran parte –y hay que subrayado–, gracias a los matemáticos. Los libros de la colección «The Visual Mind» son un testimonio claro de ello.[22]

20. Emmer, M. (1991). *Bolle di sapone*. Florencia: La Nuova Italia.
21. Almgren, F.; Sullivan, J. (1993). «Visualization of Soap Bubbles Geometries». En: Emmer, M. (ed.). *The Visual Mind*. Cambridge, Mass: The MIT press, pág. 79-83.
22. Emmer, M. (ed.) (2005). *The Visual Mind 2*. Cambridge, Mass: The MIT press (próxima aparición).

Enlaces relacionados

Congreso Matemáticas y cultura 2005, Universidad de Venecia
http://www.mat.uniroma1.it/venezia2005

Cita recomendada:

EMMER, Michele (2005). "La perfección visible: matemática y arte". *Artnodes,* n.º 4 [artículo en línea].
DOI: http://dx.doi.org/10.7238/a.v0i4.731

Michele Emmer
Profesor titular de Matemáticas (Universidad de Roma «La Sapienza»)
emmer@mat.uniroma1.it

Catedrático de Matemáticas en el Departamento de Matemáticas de la Universidad La Sapienza de Roma. Anteriormente fue profesor de las universidades de Ferrara, Trento, Viterbo, L'Aquila, Sassari y Venecia, y profesor visitante, entre otras, de las de Princeton, París-Orsay, Campinas, Barcelona y de varias universidades japonesas. Ha centrado su investigación en las EDP (ecuaciones diferenciales parciales) y las superficies mínimas, en los gráficos por ordenador, las matemáticas y las artes, en las matemáticas y la cultura, así como en el cine y vídeo de divulgación.
En 1998 recibió el premio Galileo de la Unión Matemática Italiana a la mejor labor de divulgación de esta disciplina. En el 2004 se le concedió el premio Pitagora.
Durante tres años presidió la Asociación Italiana de Medios de Comunicación Científicos, que forma parte de la asociación europea Media in Science. Es miembro, entre otras instituciones, de la Sociedad Americana de Matemáticas, de la Asociación Americana de Estética, de la Asociación Europea de Matemáticas, de la Sociedad Internacional de las Artes, las Matemáticas y la Arquitectura (ISAMA) y de la Sociedad Internacional para las Artes, las Ciencias y la Tecnología (ISAST).
Es presidente de la publicación científica en línea *Galileo* (<http://www.galileo.webzone.it>).
Durante los últimos diecisiete años ha sido colaborador en las páginas culturales y científicas del diario *L'Unità* y de otras revistas (las italianas *Diario*, *Telèma*, *Sapere* y *FMR*, la francesa *Alliage* y la edición italiana de *Scientific American*).
Ha organizado varias exposiciones y conferencias sobre el arte y las matemáticas, entre ellas el congreso anual *Matemáticas y cultura*, que tendrá lugar en la Universidad de Venecia, las exposiciones y conferencias sobre M. C. Escher celebradas en la Universidad de Roma en 1985 y 1998, la sección dedicada al espacio en la Bienal de Venecia de 1986 y la exposición itinerante *El ojo de Horus*, que visitó Roma, Bolonia, Milán y Parma en 1989. Igualmente fue el responsable del congreso y la exposición *Matemáticas y arte*, celebrados en Bolonia en 2000.